

Unités et analyse dimensionnelle en physique

Résumé

Nous présentons ici les bases de l'analyse dimensionnelle, le premier outil existant pour les physiciens. Dans la première partie, nous évoquerons les postulats permettant d'introduire le système d'unités physiques tel que nous le connaissons et sa conséquence sur l'homogénéité des formules. Dans la deuxième partie, on montrera comment se servir de l'analyse dimensionnelle pour retrouver un résultat connu (théorème de Pythagore) puis nous finirons sur un exemple plus physique de son utilisation (explosion thermonucléaire).

1. UNITÉS PHYSIQUES ET FORMULATION MATHÉMATIQUE

1.1. Unités fondamentales

En mathématiques, une équation telle que $y=ax$ est privée de tout sens subjectif. Il n'en est pas de même en physique. Bien que les relations $q=it$ et $U=RI$ soient totalement objectives dans leur contexte physique, leur signification diffère, même si par ailleurs, elles participent d'une même classe d'équivalence (celle de $y=ax$). Un autre exemple bien connu est l'analogie entre :

$$\text{la loi de Newton : } F = G \frac{mm'}{r^2}$$

$$\text{et la loi de Coulomb : } F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2},$$

ainsi participant d'une même classe d'équivalence, ces deux expressions auront conséquemment les mêmes propriétés mathématiques.

Ce qui finalement distingue les expressions mathématiques en physique (participant d'une même classe d'équivalence), c'est le contenu symbolique de ces expressions : chaque terme d'une expression analytique doit avoir un sens physique aussi abstrait soit-il. « Avoir un sens physique » signifie que chaque terme d'une expression doit pouvoir être mesuré directement ou à la rigueur indirectement¹ et pour cela doit pouvoir être comparé avec une quantité type définie conventionnellement et que l'on appelle **unité de mesure physique**. Il se trouve que seul un nombre restreint d'unités de mesure physique est nécessaire pour définir toutes les grandeurs de la physique : ce sont les unités fondamentales.

Tout ceci présuppose, a priori, une invariance de ces grandeurs au sens large : telle unité de mesure d'une quantité physique doit être la même pour tout monde et cela en tout lieu et en tout temps. C'est à ce stade que l'on devra postuler :

L'espace physique est homogène et isotrope et le temps est homogène.

¹ A noter toutefois qu'en mécanique quantique, certaines quantités ne sont pas accessibles à la mesure.

Cela signifie par exemple que : un mètre à New-York mesure aussi un mètre à Paris. Cela signifie aussi : la durée de vie de l'élément radioactif Po^{210} était de 138 jours sous le règne de Cléopâtre en Égypte, comme il l'est en 2000 place du Capitole à Toulouse.

C'est ainsi que les physiciens ont été amenés à convenir que le système d'unités le plus commode pour étudier les phénomènes physiques qui se produisent à l'échelle humaine sont les unités fondamentales suivantes :

le kilogramme, le mètre, la seconde et l'Ampère.

A partir de ce système, on peut construire des sous-unités comme le kilomètre soit mille mètres, mais également des unités secondaires comme par exemple le Coulomb à partir de la relation $q=it$ qui sera $1 \text{ C} \equiv 1 \text{ A.s}$.

Par ailleurs, quand on s'intéresse à des phénomènes physiques qui se produisent à des échelles bien plus grandes ou bien plus petites que l'échelle humaine, il est souvent plus pratique d'utiliser des systèmes d'unités qui leurs sont mieux adaptés. Ainsi, en astronomie le mètre est remplacé par l'année lumière (i.e. la distance parcourue par un photon en une année). A l'échelle atomique, la masse et la charge de l'électron et la taille de l'atome d'hydrogène constituent un système d'unités mieux approprié à la description de ce domaine de la physique.

1.2. Homogénéité des formules

Par conséquent, associée à cette notion d'unités, il y a celle d'homogénéité des formules et des relations mathématiques. Il faudra donc en physique s'assurer que :

- × **les deux membres d'une égalité doivent avoir la même dimension,**
- × **les arguments d'une fonction mathématique doivent être sans dimension.**

Par exemple, dans l'expression de la charge d'un condensateur en fonction du temps :

$$q = CV \left[1 - \exp\left(\frac{-t}{RC}\right) \right],$$

l'argument de l'exponentielle devant être sans dimension, il s'en suit que le produit RC aura la *dimension d'un temps*; d'autre part, les deux membres de l'égalité devant avoir la même dimension, il s'en suit que le produit CV aura nécessairement la *dimension d'une charge*.

Ainsi, ayant obtenu un résultat analytique à la suite d'un calcul, la première vérification qu'il convient de faire est de s'assurer de l'homogénéité de la formule établie.

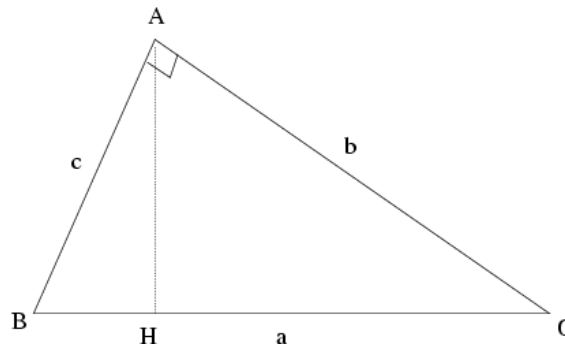
Reste à noter que très souvent les quantités qui apparaissent (par exemple dans les arguments des fonctions mathématiques) sont et doivent être considérées comme les *grandeurs caractéristiques* du problème étudié. Ainsi RC (homogène a un temps) doit être considéré comme *le temps caractéristique* du circuit RC : dans ce cas précis, il s'agit du *temps* au bout duquel on peut considérer le condensateur comme chargé.

2. ANALYSE DIMENSIONNELLE ET LOI D'ÉCHELLE

2.1. Analyse dimensionnelle et théorème de Pythagore

L'analyse dimensionnelle est la méthode heuristique par excellence de la physique. Elle consiste en la recherche des paramètres primordiaux conduisant à la détermination d'un fait physique donné. Dans le cadre de cette analyse, il est en outre possible d'établir des lois qualitatives en se basant uniquement sur la notion de dimension. Les lois ainsi établies même si elles ne sont pas d'une grande précision permettent de guider « l'intuition » du physicien vers des solutions meilleures (on a d'ailleurs vu au paragraphe précédent que l'analyse dimensionnelle est un très bon garde-fou aux erreurs analytiques). Comme première application de l'utilisation de l'analyse dimensionnelle, donnons un exemple géométrique vu par un physicien, en l'occurrence la démonstration du théorème de Pythagore par le physicien Mygdal.

Tout d'abord, caractérisons un triangle rectangle par la longueur de son hypoténuse et un angle, par exemple le plus petit des trois de ce triangle. Nous disons alors que l'aire du triangle ABC ne peut être fonction que de ces deux caractéristiques.



De plus, puisque l'aire d'une surface quelconque doit être proportionnelle au carré de sa dimension caractéristique (argument de physicien) :

$$S_{ABC} = a^2 f(\alpha)$$

où la constante de proportionnalité $f(\alpha)$ doit être une fonction universelle, c'est-à-dire sans dimension.

Abaissons maintenant de A la hauteur AH. On trouve que les triangles BHA et AHC sont semblables entre eux et semblables à BAC, de sorte que par le même raisonnement que ci-dessus on écrira :

$$S_{AHC} = b^2 f(\alpha), \text{ et } S_{BHA} = c^2 f(\alpha)$$

La constante de proportionnalité $f(\alpha)$ est la même puisque les triangles sont semblables. L'aire du triangle ABC étant la somme des aires des triangles AHC et BHA : $S_{ABC} = S_{AHC} + S_{BHA}$, on en déduit que :

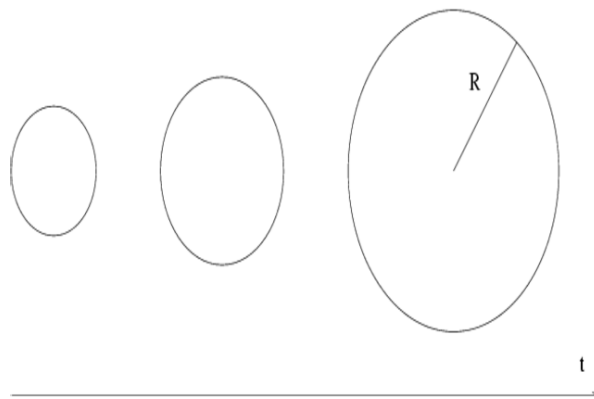
$$a^2 = b^2 + c^2,$$

la fonction universelle $f(\alpha)$ s'éliminant de part et d'autre de l'égalité.

2.2. Exemple d'une explosion thermonucléaire

Considérons maintenant un exemple plus physique : il s'agit de l'évolution temporelle du rayon d'une boule de feu, d'une explosion thermonucléaire (ce résultat a été établi et affiné par le physicien soviétique Sedov).

Le problème est le suivant : ayant le film d'une explosion thermonucléaire, peut-on estimer l'énergie de la bombe ?



Pour répondre à ce problème, nous commencerons par faire l'hypothèse que le gaz (ionisé et chaud) de la boule de feu est un gaz parfait et que par conséquent le problème ne dépende que de l'énergie initiale E et de la densité du gaz ρ .

Examinons les dimensions de tous les paramètres :

Temps	t	T
Rayon	R	L
Énergie	E	ML^2T^{-2}
Masse volumique	ρ	ML^{-3}

Si nous formons le rapport $\frac{E}{\rho}$, il a la dimension L^5T^{-2} . Sedov conclut que le rayon de la boule de feu évolue dans le temps selon la relation :

$$R = k t^{\frac{2}{5}} \left(\frac{E}{\rho} \right)^{\frac{1}{5}}$$

où k est une constante de proportionnalité déterminée grâce aux différentes séquences du film.

Il est surprenant de constater que ce modèle physique décrit le résultat à 10% près. Les richesses de l'analyse dimensionnelle n'ont pas encore fini de nous surprendre ...

Texte tiré de O. Vallée : « Éléments de mécanique classique ».